Spolufinancováno Evropskou unií

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

Kvantový pohled na intervalový chod sítě

Michal Belina

Aplikace umělé inteligence a kvantového počítání v energetice II

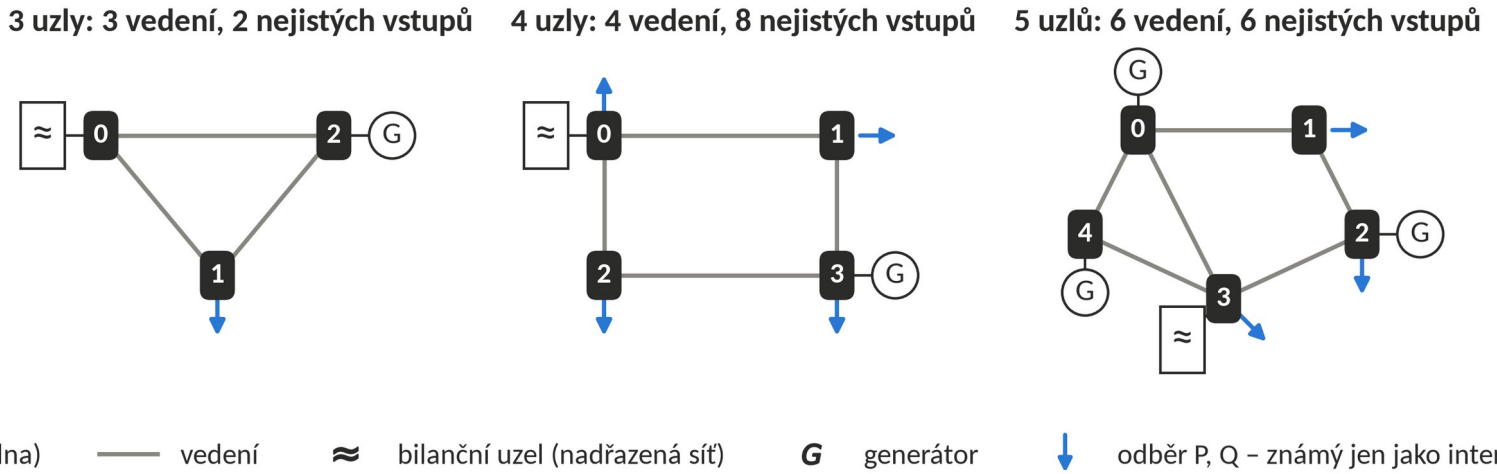
projekt „Zvýšení odolnosti energetických sítí v kontextu dekarbonizace, decentralizace a udržitelného socioekonomického rozvoje“
CZ.02.01.01/00/23_021/0008759
OPERAČNÍ PROGRAM JAN AMOS KOMENSKÝ

26. 10. 2026



Intervalový chod sítě

Odběry známe jen jako intervaly. Jaké meze mají napětí a toky výkonu?



- **Vstup u:** činné (P) a jalové (Q) odběry v intervalu ±10 %; K = počet nejistých vstupů (2–8)
- **Výstup y:** |V| v uzlech, P ve vedeních a P bilančního uzlu
- **Model:** AC rovnice chodu sítě (vpravo), Newton–Raphson v pandapoweru, tolerance 10^{-8} MVA

$$P_i = \sum_{k=1}^{N} |V_i|\,|V_k|\,(G_{ik}\cos\theta_{ik} + B_{ik}\sin\theta_{ik})$$

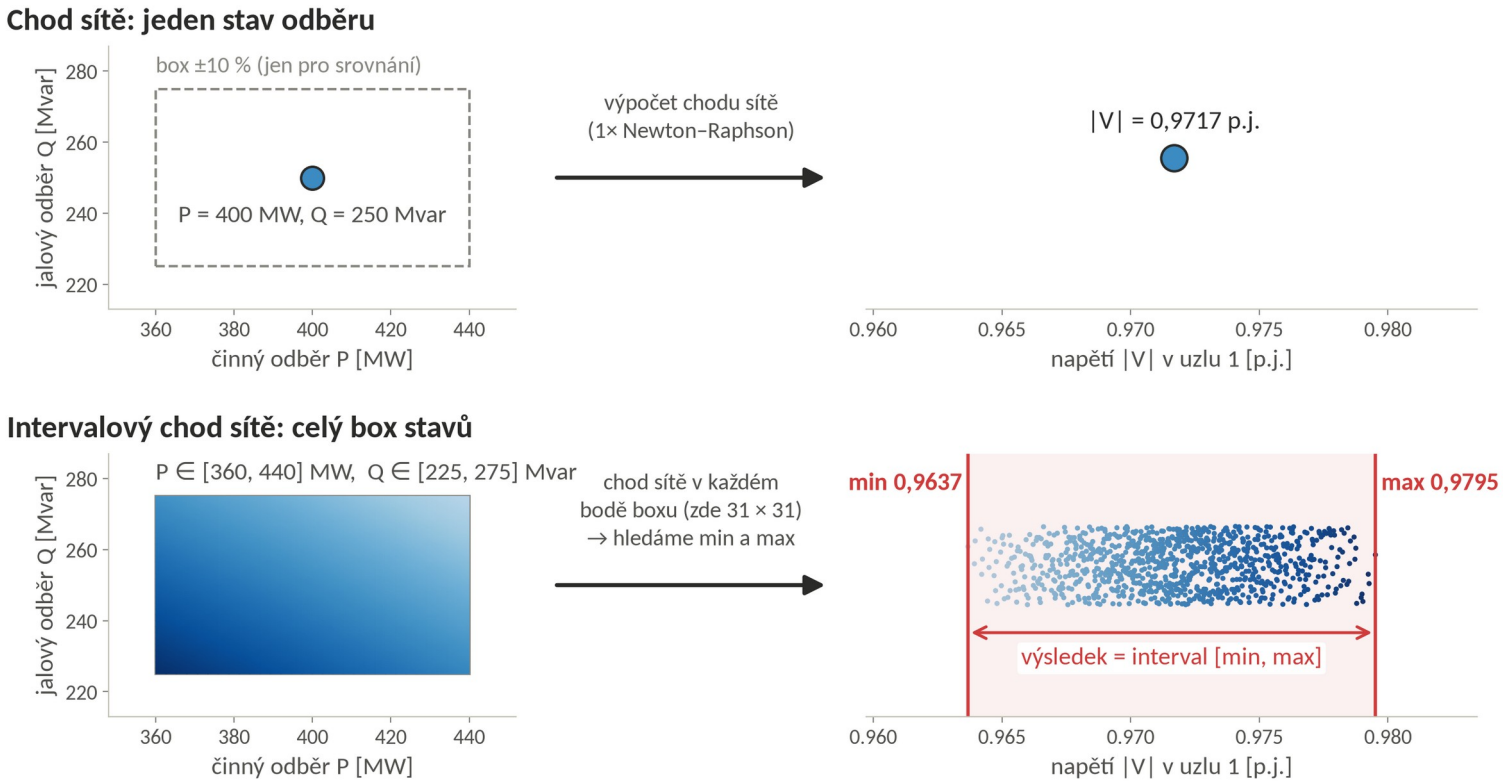
$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} |V_i|\,|V_k|\,(G_{ik}\sin\theta_{ik} - B_{ik}\cos\theta_{ik})$$

P_i, Q_i – činný a jalový výkon dodávaný do uzlu i (odběr = záporná dodávka)
$|V_i|$, θ_i – velikost a úhel napětí v uzlu i; $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$
G_{ik}, B_{ik} – vodivost a susceptance: reálná a imaginární část prvku admitanční matice sítě $Y = G + jB$
N – počet uzlů; zadané jsou odběry, hledaná napětí |V| a úhly θ



Chod sítě vs. intervalový chod sítě

Chod sítě spočítá jeden stav, intervalový chod sítě hledá meze přes všechny stavy v boxu.



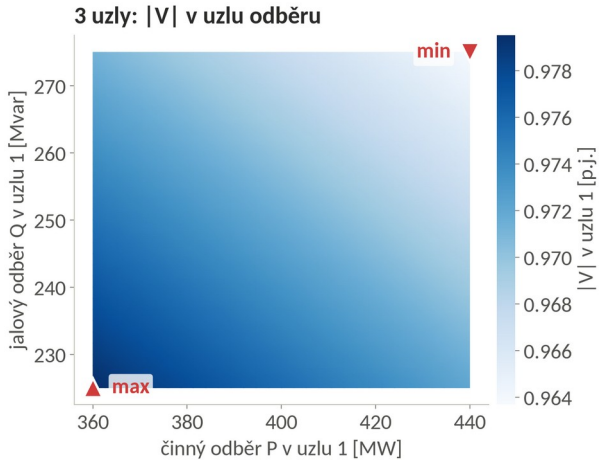
	Chod sítě	Intervalový chod sítě
Vstup	čísla: P, Q každého odběru	intervaly: box všech možných P, Q
Výstup	čísla: |V| v uzlech, toky ve vedeních	intervaly [min, max] každého výstupu
Výpočet	1× soustava rovnic (Newton–Raphson)	2 optimalizace na výstup, každá z mnoha výpočtů chodu
Otázka	jak síť vypadá v daném stavu?	co nejhoršího může nastat?

Úloha: meze každého výstupu

Pro každý výstup globální minimum a maximum přes box.

- **Certifikované vnitřní meze:** hlásíme $y_j(u^*)$ spočtené pandapowerem v navrženém bodě u^*, nikdy hodnotu náhradního modelu ani energii z kvantového počítače

Síť	Uzly	Vedení	Nejisté vstupy K	Výstupy	Meze
3 uzly	3	3	2 (1 odběr)	5	10
4 uzly	4	4	8 (4 odběry)	7	14
5 uzlů	5	6	6 (3 odběry)	8	16



Ilustrace, nejmenší síť, K = 2. Extrém ▼ = minimum, ▲ = maximum; oba v rohu boxu. Stejný obraz platí pro všechny meze ve třech vybraných sítích.

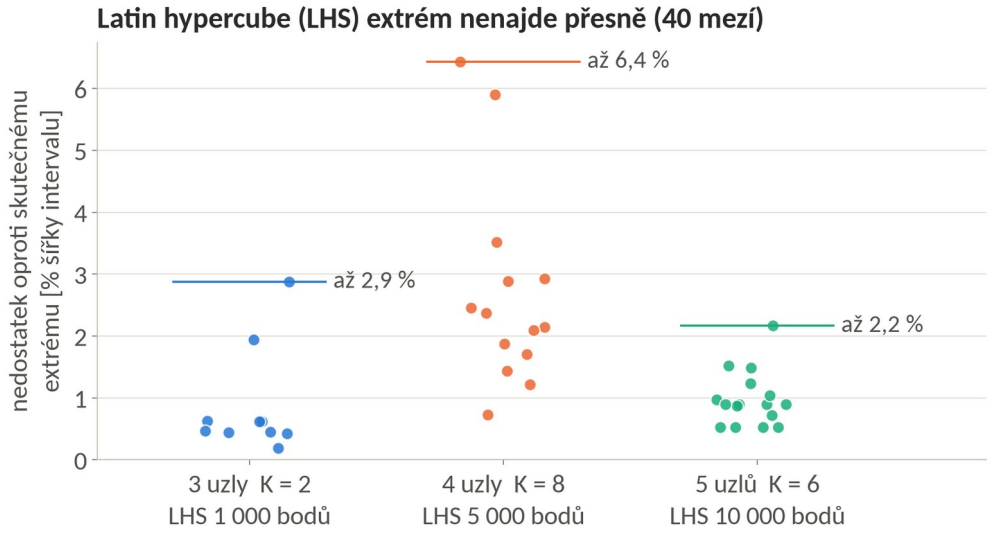
Meze = 2 × výstupy (minimum a maximum každého výstupu); K = 2 × počet odběrů (P a Q).

Klasické přístupy

Každá klasická metoda něco obětuje: garanci, přesnost, nebo škálování.

Metoda	Mez	Cena	Slabina
Monte Carlo / LHS	vnitřní	N výpočtů chodu	pomalá konvergence, míjí rohy
Výčet vrcholů	vnitřní	2^K výpočtů chodu	exponenciální; přesné jen pro extrém ve vrcholu
Intervalová aritmetika	vnější	intervalový Newton	nadhodnocení (wrapping), může divergovat
Lokální optimalizace	vnitřní	~50 výpočtů chodu na start	lokální extrémy, nutný multistart

LHS = Latin hypercube sampling: N náhodných bodů tak, že každý z N stejných dílků každé osy obsahuje právě jeden bod. L-BFGS-B = kvazinewtonovská lokální optimalizace s omezením na box (gradient z konečných diferencí). Vnitřní mez = skutečná hodnota v nalezeném bodě, interval nepřestřelí; vnější mez ho jistě pokrývá, ale může být příliš široká.

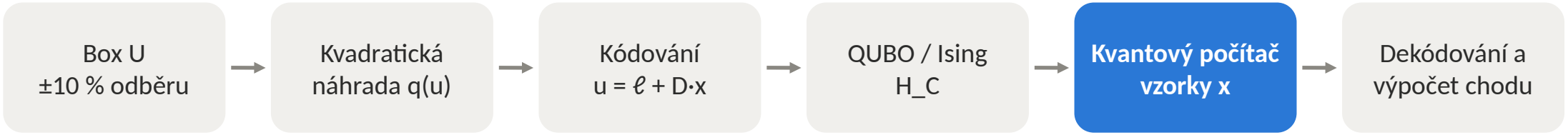


- **Reference (837 s CPU):** pro každou síť LHS (1000 / 5000 / 10 000 bodů) + všech 2^K vrcholů (4 / 256 / 64); z 10 nejlepších bodů L-BFGS-B; mez = nejlepší skutečná hodnota.
- **až 6,4 %** šířky intervalu chybí LHS.



Od chodu sítě ke Quadratic unconstrained binary optimization

Kvadratická náhrada + lineární kódování = QUBO, kvantový počítač jen navrhuje kandidáty.



$$q_j(u) = c_0 + g^T u + \tfrac{1}{2} u^T A\, u$$

$$u = \ell + D\, x, \quad x \in \{0,1\}^n$$

$$E(x) = \pm\, q_j(\ell + Dx) = x^T Q\, x + c$$

$$H_C = \sum_i h_i Z_i + \sum_{i<k} J_{ik} Z_i Z_k$$

q_j – náhradní model výstupu y_j; c_0, g, A – jeho konstanta, gradient a matice druhých derivací

x – n bitů (qubitů); ℓ – dolní meze vstupů; D – váhy bitů (bin2: Δ a 2Δ, Δ = třetina šířky intervalu)

E – energie QUBO; Q, c – její matice a konstanta; + pro dolní, − pro horní mez

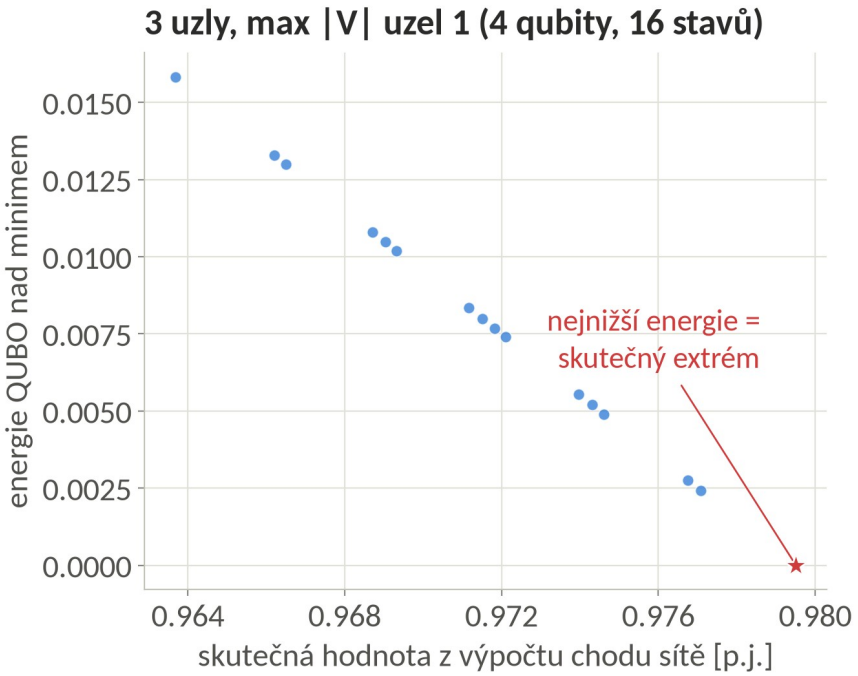
H_C – tentýž problém pro qubity: $x_i = (1 - Z_i)/2$; Z_i – Pauliho Z na qubitu i; h_i, J_ik – lineární a párové koeficienty

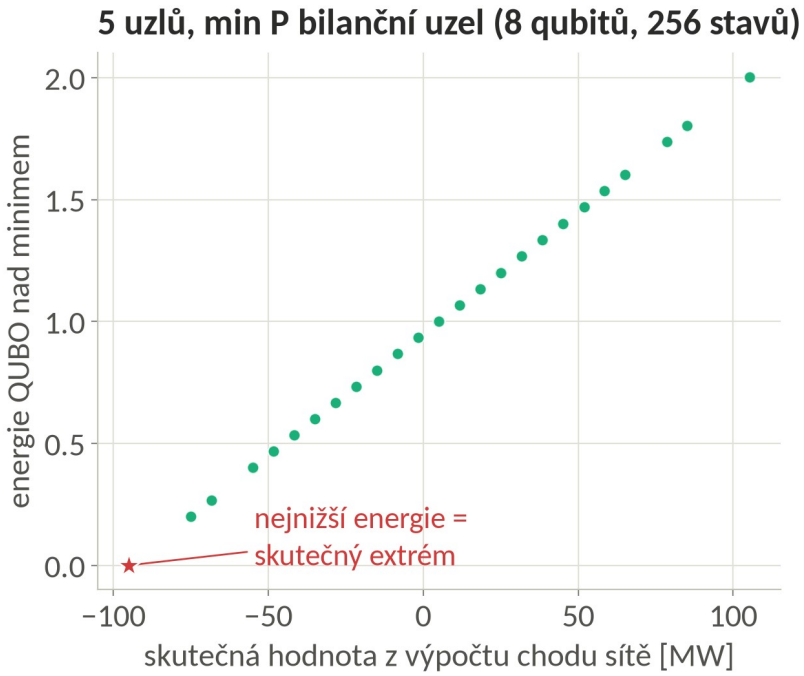
- **Náhrada:** kvadratický polynom pro každý sledovaný výstup nafitovaný metodou nejmenších čtverců (OLS) na 300 bodech LHS + všech vrcholech boxu a středu (vstupy škálované na [−1, 1]), ověřený na 200 dalších
- **Kódování:** bin1 (2 úrovně, 1 qubit na vstup), bin2 (4 úrovně, 2 qubity), dw3 (3 úrovně na 2 qubitech, fáze 5); oba krajní body jsou na mřížce
- **Znaménko:** QUBO se vždy minimalizuje: dolní mez min q, horní mez min (−q)



QUBO: nejnižší energie = skutečný extrém

Náhradní model je tak přesný, že základní stav QUBO je skutečný extrém.





$\leq 7 \cdot 10^{-5}$

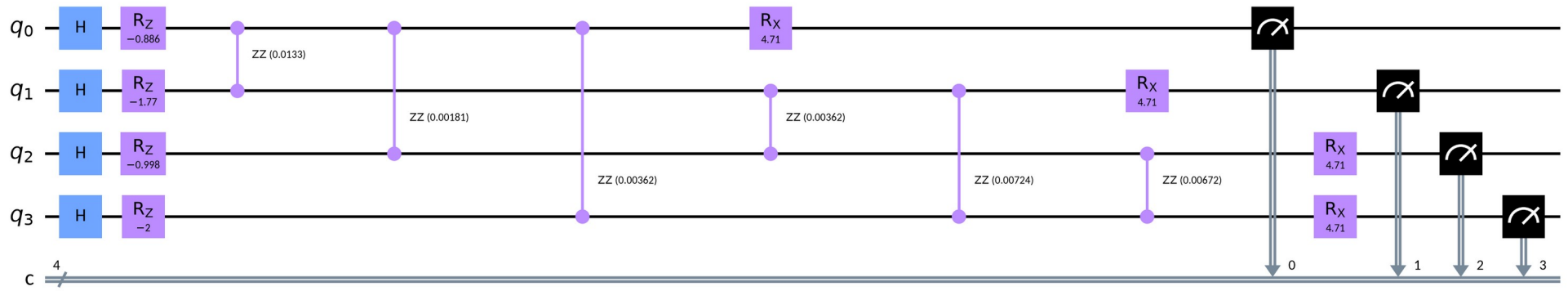
chyba náhrady v nalezeném bodě (rel. k rozsahu)

2–12

qubitů (4 – 4096 bitových řetězců)



Obvod QAOA



Skutečný obvod, 4 qubity, p = 1

$$|\psi(\gamma,\beta)\rangle = \prod_{l=1}^{p} e^{-i\beta_l \sum_i X_i}\, e^{-i\gamma_l H_C}\, |+\rangle^{\otimes n}$$

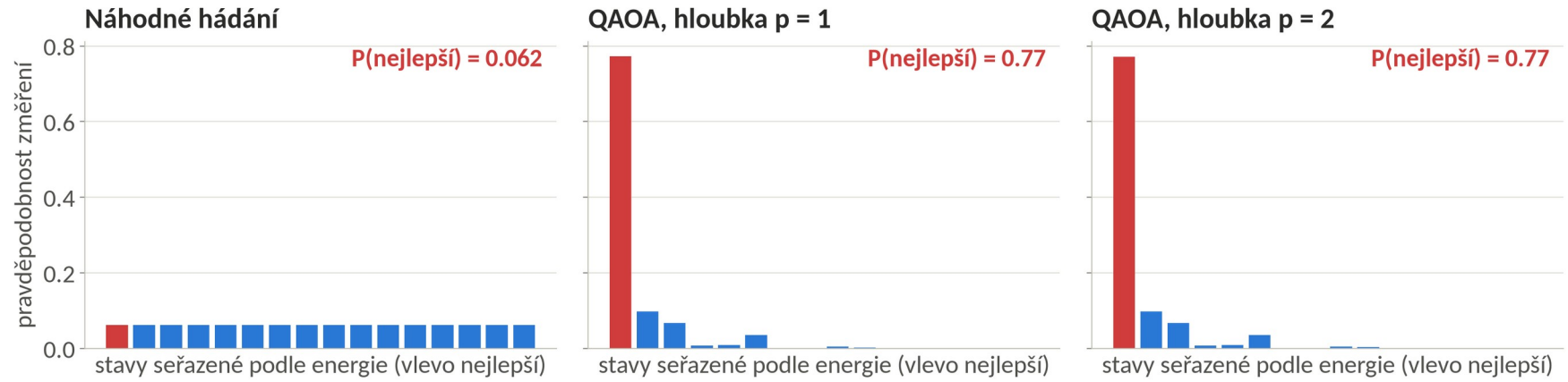
$|+\rangle^{\otimes n}$ – rovnoměrná superpozice n qubitů;
p – počet vrstev (hloubka); γ_l, β_l – úhly l-té vrstvy
H_C – Isingův tvar QUBO (předchozí slajd)

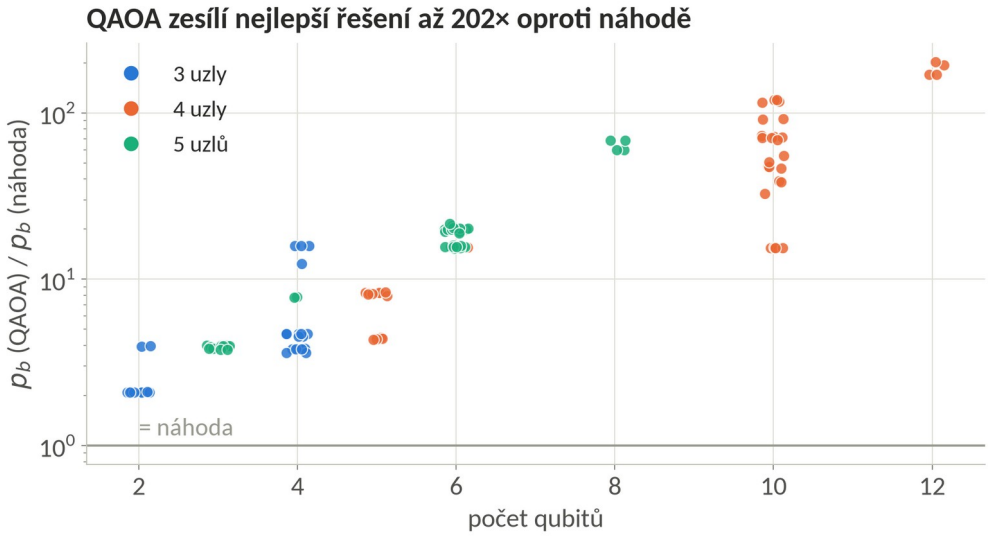
- **Ladění úhlů:** minimalizace $CVaR_{0,2}$ = průměrná energie nejlepších 20 % rozdělení měření; COBYLA (bezgradientní optimalizátor), 5 startů, p = 1, 2; pak doladění přímo na p_b
- $\mathbf{p_b}$ = pravděpodobnost změření základního stavu (nejnižší energie), při náhodném hádání: (počet základních stavů) / 2^n
- **Hardware:** jen pevné úhly z ideální simulace, 10 000 měření na obvod



QAOA bez šumu: zesílení roste s velikostí

3 uzly, max |V| uzel 1: 16 možných odpovědí





202×

nejvyšší zesílení
(12 qubitů, 4 uzly)

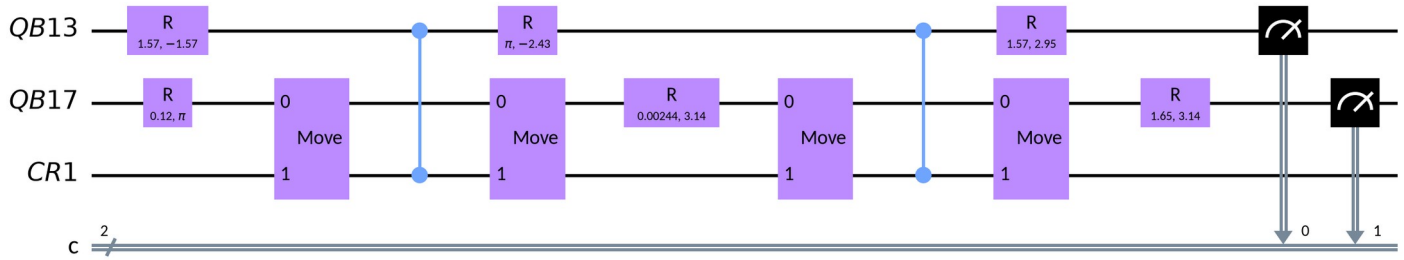
4–200

měření pro 95% jistotu
(náhoda: až 12 000)

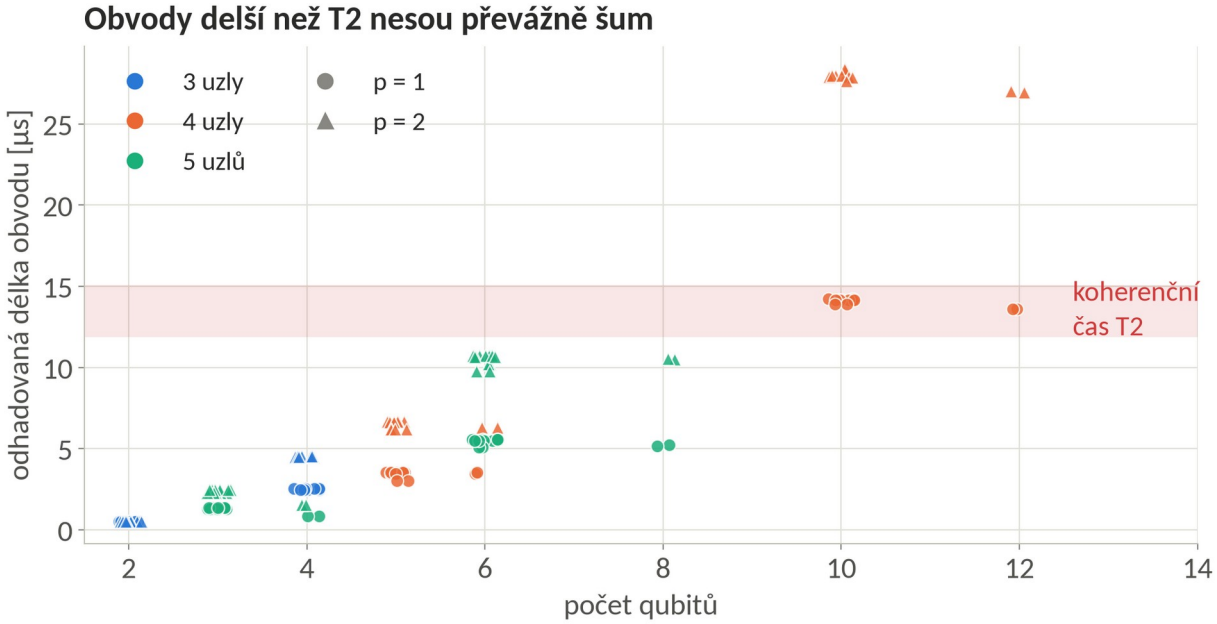


Transpilace na VLQ

Hvězdicová topologie: každé CZ jde přes rezonátor (MOVE) – obvody rychle rostou.



R = PRX, jednoqubitová rotace; Move = přesun stavu qubitu do rezonátoru a zpět; CZ = dvouqubitové hradlo (qubit–rezonátor); CR1/COMPR1 = rezonátor.

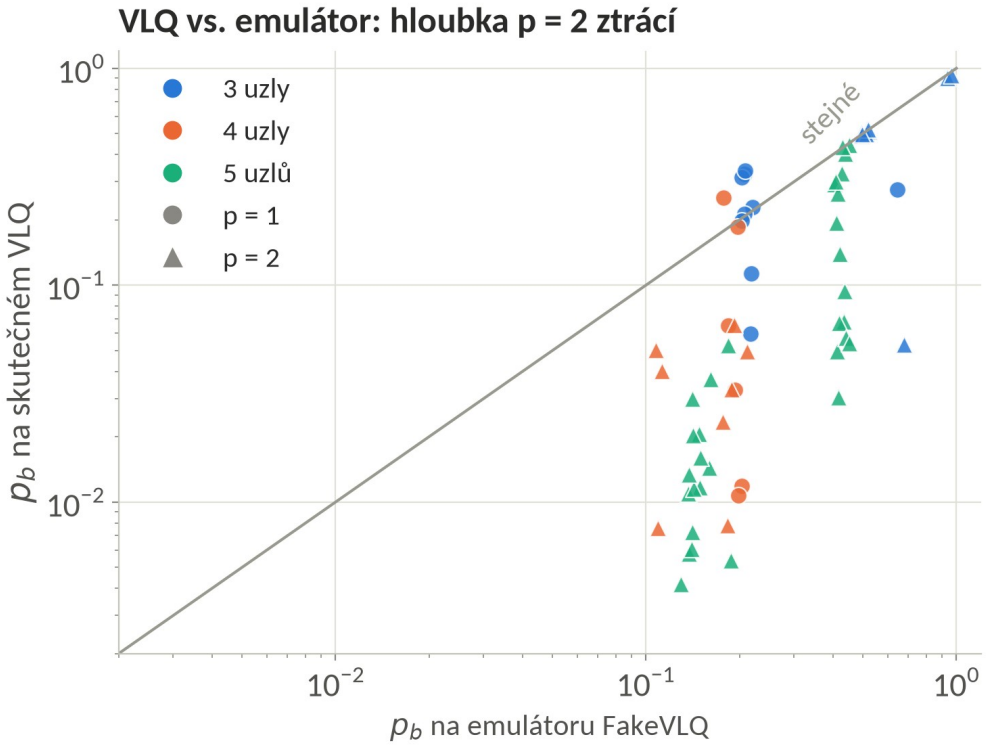


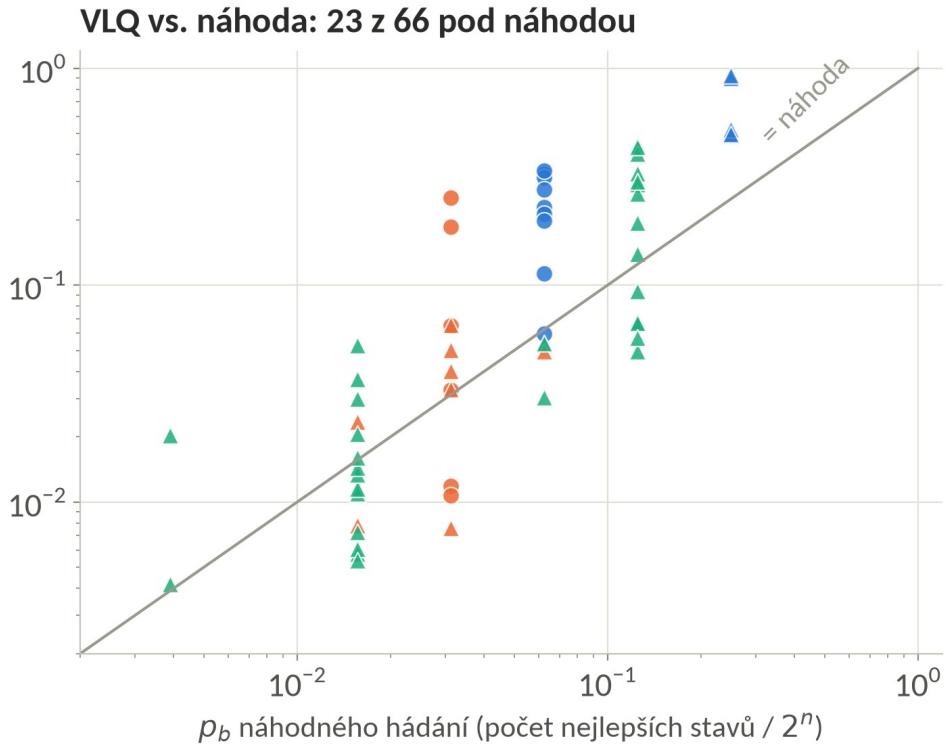
- **Čip:** 24 qubitů QB1–QB24 + rezonátor COMPR1
- **T2:** koherenční čas – jak dlouho qubit udrží fázi; VLQ ≈ 12 µs
- **Go obvody:** 2–60 CZ, hloubka ≤ 156 vrstev
- **No-go:** 80–166 CZ, 156 vrstev ≤ hloubka ≤ 407 vrstev
- **Qubity:** podle kalibrace 23. 10.: QB13, QB17, QB9, QB14, …



QAOA na skutečném VLQ

66 obvodů v 1 úloze





VLQ je experimentální zařízení

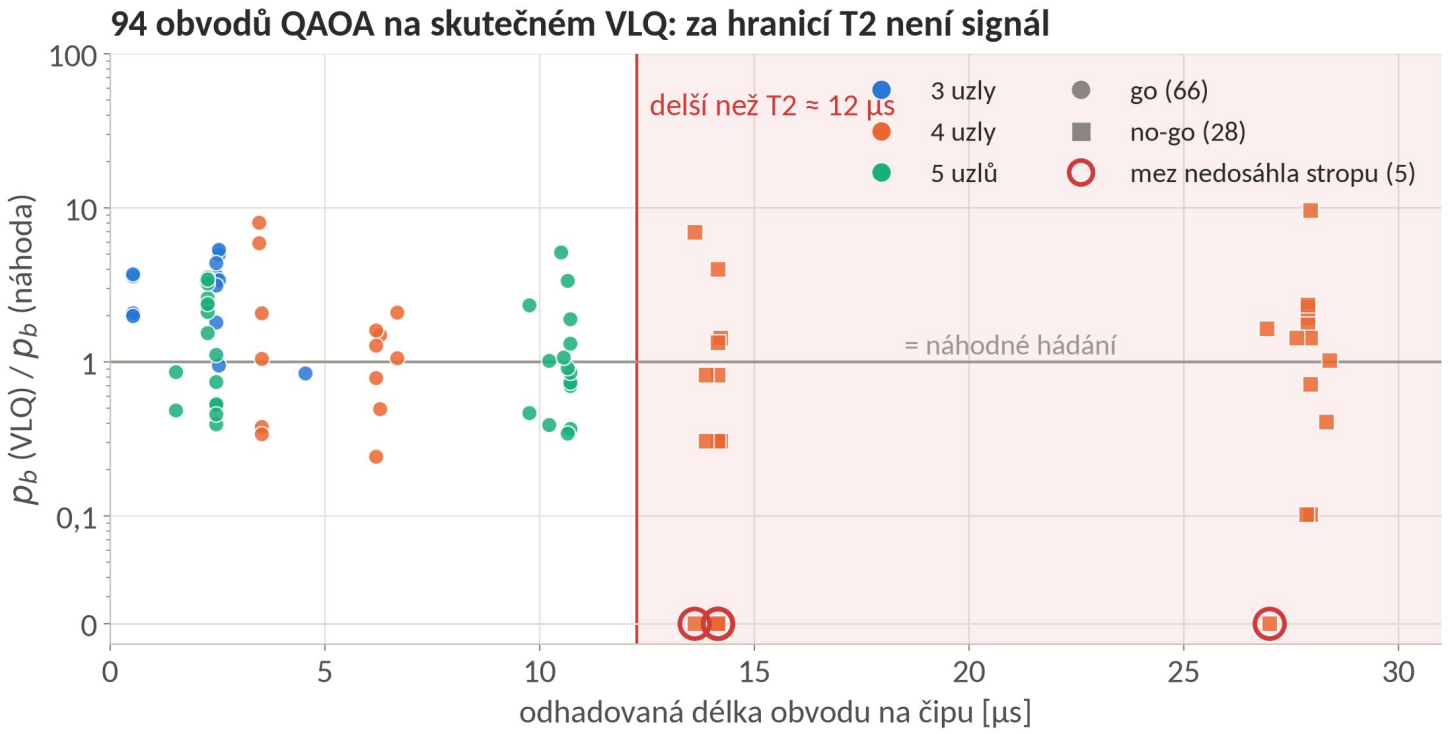
23 z 66

obvodů pod úrovní
náhodného hádání



VLQ za hranicí T2

Obvody delší než T2 jsou na VLQ horší než náhoda – první nepodchycené meze projektu.



28 obvodů

no-go, 1 úloha, 97 s
(10–12 qubitů, 14–28 µs)

5 mezí

minuto, až o 0,25 %
rozsahu výstupu



Kvantová procházka: H(λ) = V + λT

Nediagonální Hamiltonián: vzorky časového vývoje tvoří podprostor, který diagonalizujeme klasicky.

$$H(\lambda) = V + \lambda T, \qquad T = -\sum_k X_k$$

$$|\psi_k\rangle = e^{-it_k H}\,|+\rangle^{\otimes n}, \quad k = 0, \ldots, 7$$

S = platné vzorky, $H_S = P_S H P_S \rightarrow$ nejnižší vektor

V – diagonální energie QUBO (H_C); T – příčné pole, na platných stavech posune jeden vstup o úroveň; λ – jeho síla; X_k – Pauliho X na qubitu k

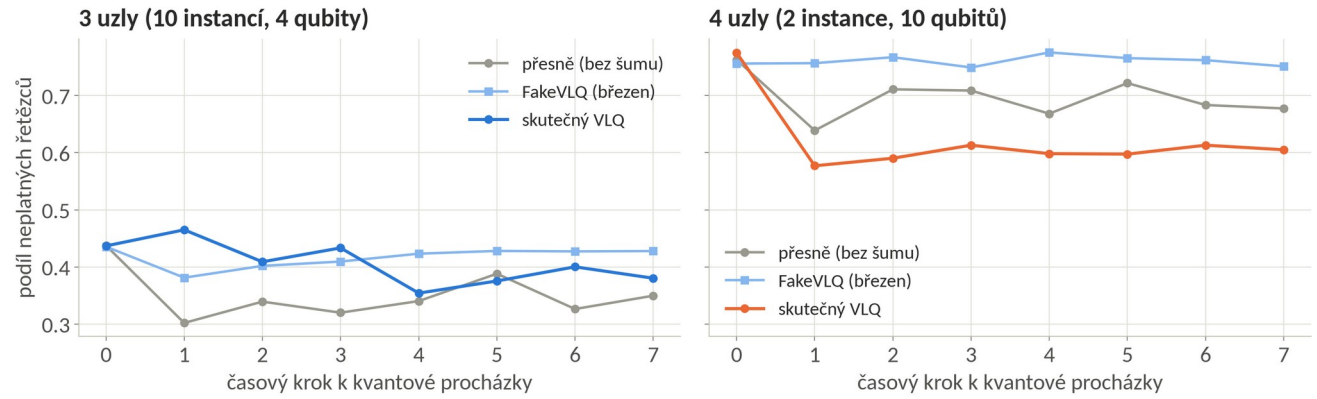
t_k – časy vývoje; |ψ_k⟩ – stav v čase t_k, z něj 1250 měření

S – různé platné naměřené řetězce; P_S – projekce na S; H_S – H zúžený na S, diagonalizujeme klasicky; nejlepší konfigurace certifikujeme

Únik = podíl neplatných řetězců; VLQ: 1 úloha na instanci, 12 ze 40 doběhlo, 1 mez minuta o $1{,}1 \cdot 10^{-4}$ p.j. (poměrné jednotky)

- **Domain wall (dw3):** 3 úrovně na 2 qubitech (00, 10, 11); vzor 01 je neplatný = únik
- **Trotter:** e^(−itH) rozložený na krátké kroky hradel; 8 časů × 1250 měření

Kvantová procházka na VLQ (12 ze 40 instancí doběhlo)



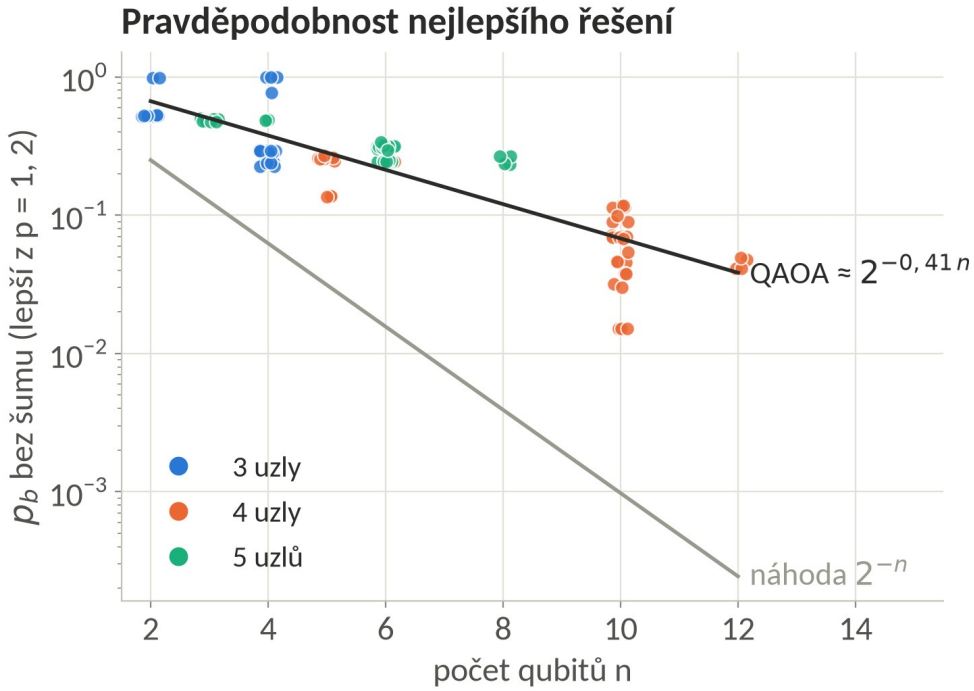
Závěr

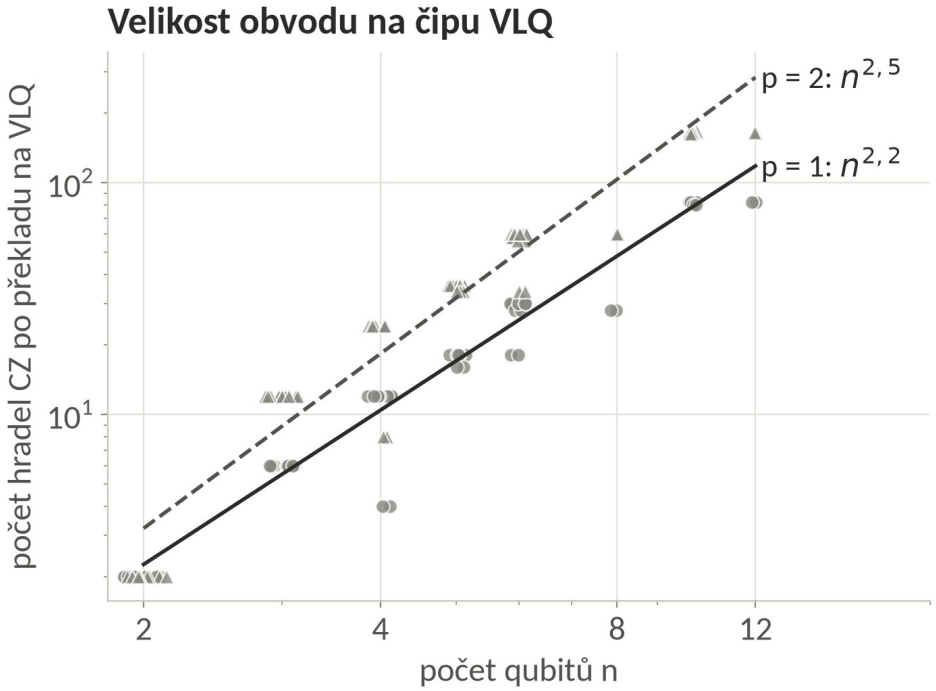
- **Bez šumu:** funguje
- **Na VLQ:** obvody 540–11 700 CZ (QAOA go ≤ 60) – daleko za T2; průběh úniku neodpovídá přesné procházce; nejdelší obvody čip nepřijme
- vzorky pokryjí 83–100 % platných stavů → diagonalizace je téměř úplná



Jak QAOA škáluje s velikostí sítě

Qubity rostou lineárně se vstupy, hradla zhruba kvadraticky, měření stále exponenciálně.





- **Qubity:** n = (vstupy, které výstup ovlivňují) × bity na vstup; 100 nejistých odběrů → K = 200 → 200–400 qubitů
- **Obvod:** plné QUBO = n(n−1)/2 členů ZZ na vrstvu (400 qubitů ≈ 80 000); na VLQ CZ ~ $n^{(2,2–2,5)}$
- **Měření:** p_b ≈ 2^(−0,41 n) → ~3 / p_b měření, tj. ~$1{,}33^n$ místo 2^n u náhody
- **Úhly:** laděné přesnou simulací (sama ~2^n); pro velké n přenos úhlů nebo ladění na hardwaru



Shrnutí

Princip QAOA funguje

- Bez šumu zesílí nejlepší řešení až 202× nad náhodu
- Zisk roste s počtem qubitů:

$p_b \approx 2^{(-0,41\ n)}$

Hardware je limit

- Platí pro VLQ i FakeVLQ: T2 ≈ 12 µs → jen obvody do cca 60 CZ
- Kvantová procházka: 540–11 700 CZ

Škálování je exponenciální

- Qubity ~ vstupy, hradla CZ ~ n^2,2
- Měření ~ $1{,}33^n$ (náhoda 2^n)
- Ladění úhlů simulací je dražší než vyčíslit všech 2^n stavů

Naše úlohy: výčet vrcholů s kroky navíc

- Extrémy ve vrcholech boxu
- Náhradní model trénovaný i na vrcholech,
  ≤ 4 096 stavů → optimum najde i náhoda
- Ověřujeme řetězec síť → QUBO → čip → certifikovaná mez, ne výhodu

Kde může mít QAOA výhodu

- Velké sítě: 2^K vrcholů nejde vyčíslit ani použít k trénování
- Silná nelinearita a vazby vstupů: extrém uvnitř boxu, „frustrované“ QUBO
- Delší koherence nebo oprava chyb



Co dál

1. **Optimalizovat QUBO**

   řidší QUBO (vynechat slabé vazby ZZ), bin1, p = 1, mapování na hvězdu → méně CZ/MOVE

2. **Nelineární a větší sítě**

   vysoké zatížení, širší nejistota (±50 %), extrém uvnitř boxu – kde náhoda nestačí

3. **Bez skrytých zkratek**

   náhradní model bez vrcholů boxu; úhly bez simulace (přenos, mřížka úhlů na čipu)

4. **Implementace jiného popisu Intervalového chodu sítě**



Děkuji za pozornost

Michal Belina, michal.belina@vsb.cz



Záloha: konkuruje QAOA klasickým metodám?

Dnes ne – a na našich instancích to ani není potřeba. Výhoda by mohla být jen u silně nelineárních sítí.

Dnes

- Naše výstupy jsou téměř lineární (chyba lineárního modelu < 0,5 % rozsahu): stačí znaménka citlivostí (K + 1 výpočtů chodu) a 2 vrcholy.
- Klasické heuristiky pro QUBO (simulované žíhání, tabu search) zvládají tisíce proměnných; QAOA na VLQ ≈ 10 qubitů v rámci T2.
- QAOA s malou hloubkou nemá obecně prokázanou výhodu; u nás měření rostou ~$1{,}33^n$.
- Úhly z klasické simulace – ta je sama exponenciální.

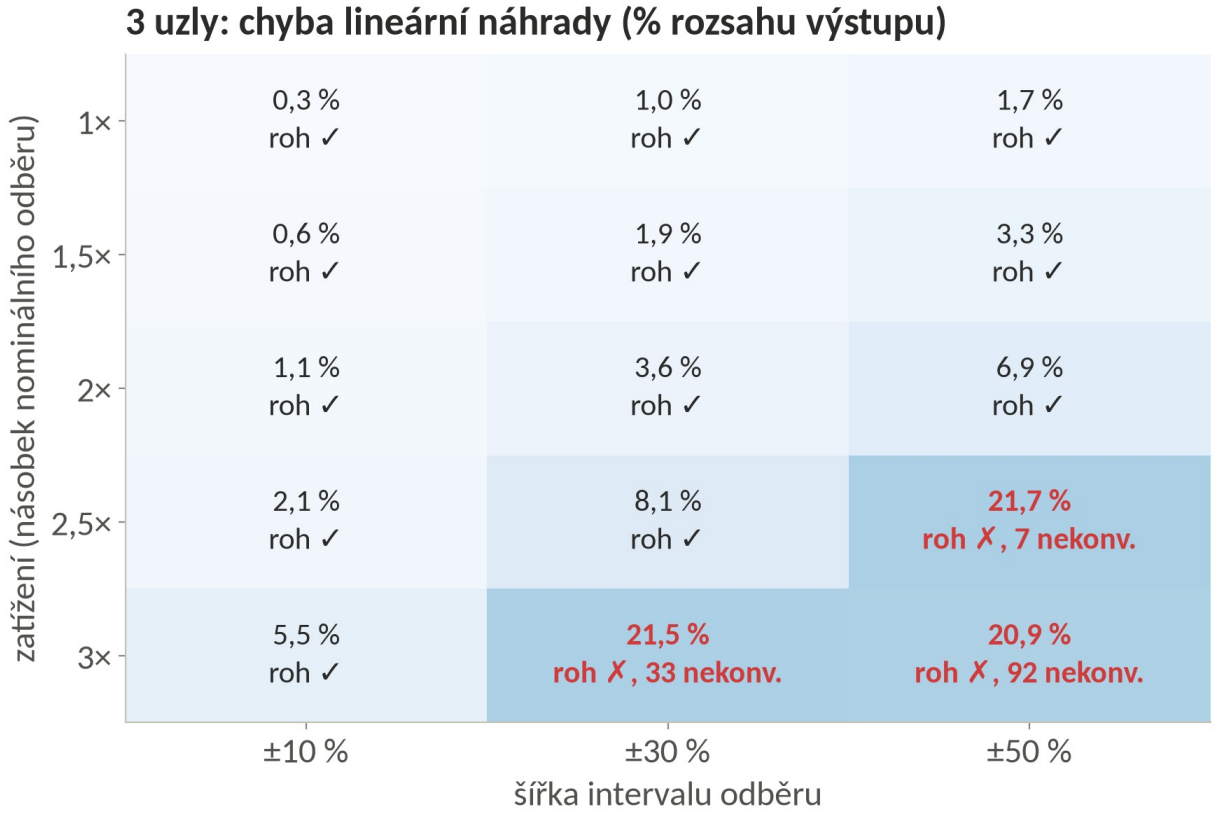
Kdy by mohla

- Silně nelineární, nekonvexní výstupy (vysoké zatížení, velká nejistota) s mnoha vstupy – tam klasická globální optimalizace (větvení a meze) roste exponenciálně.
- Hardware s delší koherencí nebo korekcí chyb: obvody mají ~n^2 hradel.
- Úhly bez simulace: přenos mezi instancemi, ladění na hardwaru.
- Řidší QUBO (méně párů ZZ) → kratší obvody.



Záloha: kdy přestane být box lineární

Nerozhoduje velikost sítě, ale zatížení a šířka nejistoty.



- **Buňka:** největší chyba lineárního modelu přes 5 výstupů (% rozsahu); roh ✓ = oba extrémy ve vrcholu boxu; nekonv. = body, kde Newton nekonvergoval
- **Naše instance (1×, ±10 %):** lineární model < 0,5 %, kvadratický < 0,01 % → extrémy v rozích
- **Nelinearita:** blízko meze zatížitelnosti, velká nejistota (OZE), meze jalového výkonu generátorů, toky měnící směr
- **Jak reálné:** ±10 % ≈ chyba předpovědi odběru uzlu; ±30–50 % není chyba předpovědi, ale rozsah provozních stavů (den, rok) nebo čistý odběr s FVE a větrem; 2,5–3× a ±50 % = horní okraj 3,75–4,5× nominálu, za mezí zatížitelnosti



Záloha: jak přesný je náhradní model

Na našich boxech je náhrada přesná na tisíciny procenta, nejvíc v rozích boxu.

≤ 0,005 %

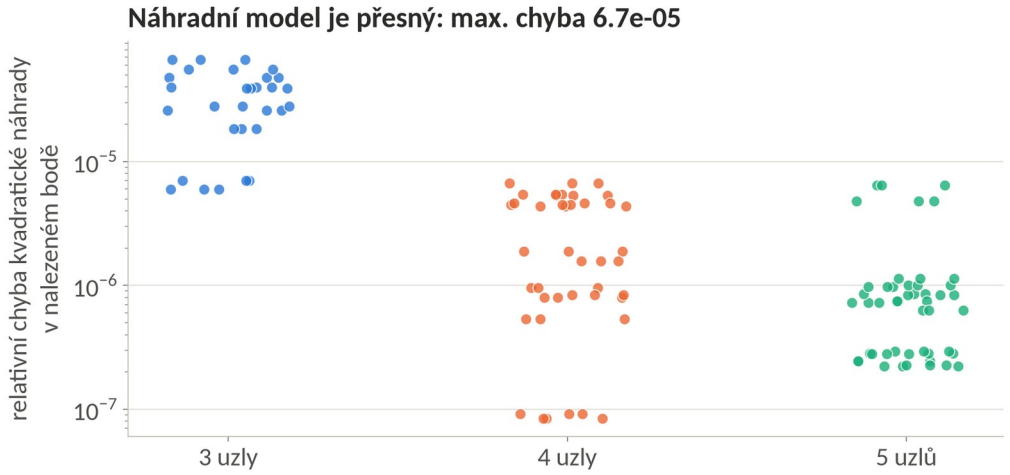
největší chyba na 200 kontrolních bodech (20 výstupů; limit 5 %)

≤ $7 \cdot 10^{-5}$

chyba v nalezeném bodě (rel. k rozsahu)

120 / 120

instancí: základní stav QUBO = referenční mez



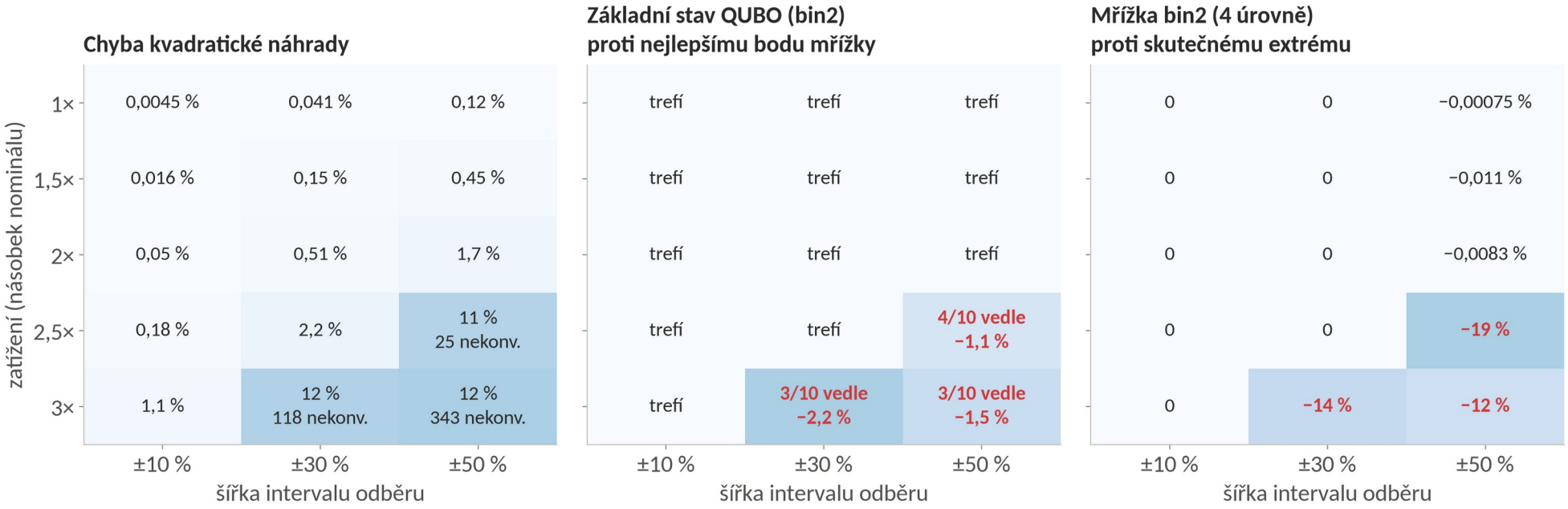
- **Trénovací body:** 300 LHS + všech 2^K vrcholů boxu (4 / 256 / 64) + střed → model je nejpřesnější v rozích, kde leží extrémy; ověření na 200 dalších bodech LHS
- **Proč to funguje:** na ±10 % je výstup téměř lineární (lineární model < 0,5 %); kvadratický člen ≤ ~1 % lineárního
- **Chyba modelu mez nezkazí:** každý naměřený řetězec ověříme skutečným chodem sítě → mez může vyjít jen užší, nikdy nepřestřelí



Záloha: náhradní model v nelineárním režimu

Model se kazí až u meze zatížitelnosti – a tam selže dřív hrubá mřížka než model.

3 uzly: náhradní model a QUBO v nelineárním režimu (% rozsahu výstupu, nejhorší z 10 mezí)



- **Do 2× zatížení i při ±50 %:** kvadratická náhrada < 2 %, základní stav QUBO vždy trefí nejlepší bod mřížky
- **U meze zatížitelnosti (2,5–3×, ±30–50 %):** náhrada 11–12 %, 3–4 z 10 mezí vedle o 1–2 %; část bodů nekonverguje
- **Mřížka:** extrém se přesune dovnitř boxu k hranici řešitelnosti → bin2 ztrácí 12–19 %, samotné rohy (bin1) 28–60 %



Záloha: QAOA laděná simulací je benchmark, ne řešič

Úhly ladíme přesnou simulací, která zná všech 2^n energií – řešení je známé dřív, než obvod spustíme.

Ladění minimalizuje CVaR, a ta potřebuje energii každého z 2^n řetězců: simulace je spočítá hned na začátku. Běh na VLQ proto testuje, zda čip udrží zesílení předpovězené simulací – sám úlohu neřeší.

	Dnes: úhly ze simulace	Ladění přímo na VLQ (odhad)
Vyhodnocení obvodu	medián ≈ 190 (p = 1), ≈ 420 (p = 2) na instanci	totéž, každé = obvod × 1000 měření
Úlohy (jobs)	1 úloha pro všech 66 instancí	COBYLA jde krok po kroku → ≈ 13 000–28 000 úloh
Čas na čipu	217 s celkem	≈ 2–3 s na vyhodnocení → 8–20 min na instanci, 66 instancí ≈ 9–23 h
Šum	úhly o šumu nevědí (p = 2: 0,21× emulátoru)	zašuměný odhad CVaR, plochá krajina úhlů; úhly se ale šumu přizpůsobí

Realistické cesty

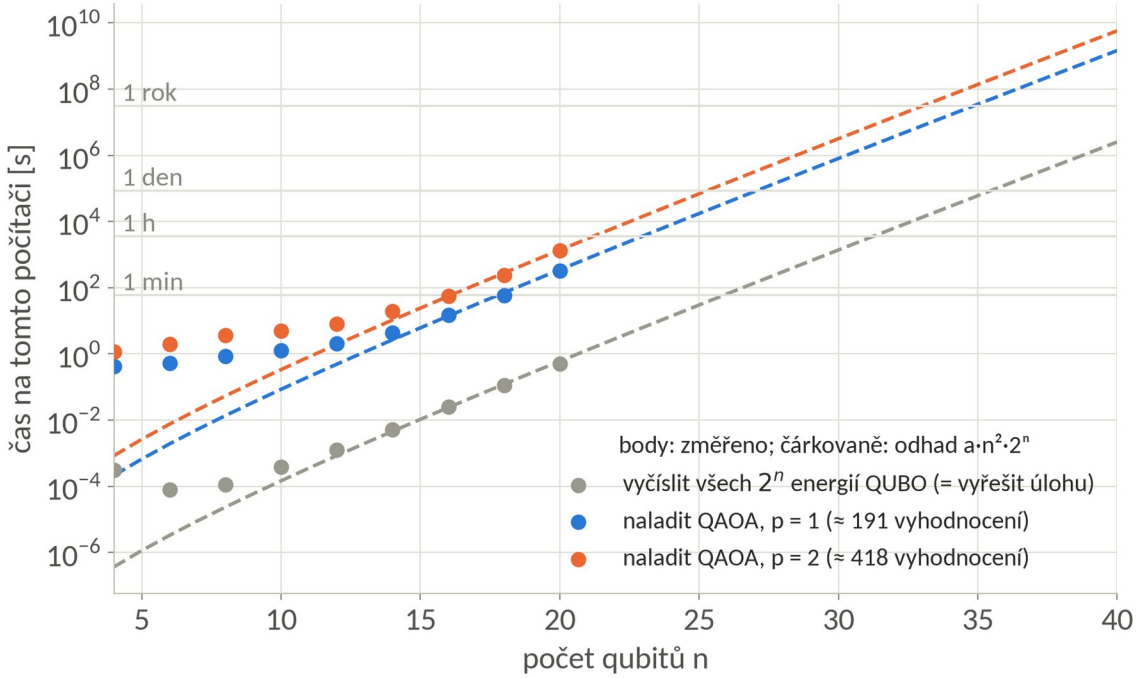
- **p = 1:** mřížka úhlů 20 × 20 = 400 obvodů v jedné úloze (≈ 2 min na čipu), pak vzorkování
- **Přenos úhlů:** naladit na malé simulovatelné instanci, použít na velké (úhly bývají podobné)
- **Pevný rozvrh:** lineární náběh úhlů ≈ diskretizované kvantové žíhání, bez ladění



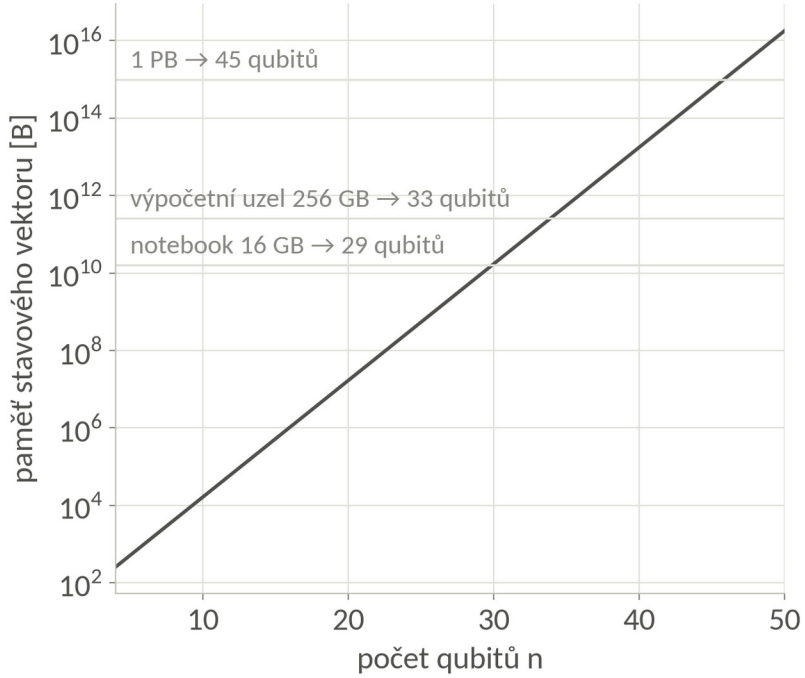
Záloha: kolik stojí naladit QAOA

Ladění simulací roste jako 2^n a je stovky až tisíckrát dražší než vyčíslit všech 2^n energií QUBO.

Ladění úhlů simulací je dražší než přímé řešení



Simulace narazí na paměť



- **Naše běhy:** 1–2 s pro 2–4 qubity, medián 101 s pro 12 qubitů; 240 běhů ≈ 1 h na jednom jádře
- **30 qubitů (odhad):** vyčíslení všech energií ≈ 20 min, naladění QAOA dny až týdny; paměť: 29 qubitů notebook, 45 qubitů ≈ 1 PB
- **Důsledek:** kdo umí obvod simulovat, umí úlohu rovnou vyřešit → QAOA laděná simulací je jen benchmark; realistická síť = 200–400 qubitů

